2019 下半年教师资格《高中数学》真题及答案

一、单项选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

1．若函数 $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x<0 \\ b+\sin 2x & x\geq 0 \end{cases}$，在 $x=0$ 处可导，则 a，b 的值为（　　）.

A．$a=2$，$b=1$　　B．$a=1$，$b=2$

C．$a=-2$，$b=1$　　D．$a=2$，$b=-1$

2．已知 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，若 $f(x)$ 的一阶导函数在 $x=0$ 处连续，则 n 的取值范围是（　　）.

A．$n\geq 3$　　B．$n=2$　　C．$n=1$　　D．$n=0$

3．已知 $M_1(1,2,-1)$，$M_2(1,3,0)$，平面 π_1 过 M_1 点且垂直与 M_1M_2，平面 π_2：$6x+y+18z-18=0$

与平面 π_1 之间的夹角为（　　）.

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{9}$

4．若向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=$（　　）.

A．$\vec{b}\times\vec{a}$　　B．$\vec{c}\times\vec{b}$　　C．$\vec{b}\times\vec{c}$　　D．$\vec{a}\times\vec{c}$

5.设 n 阶方阵 M 的秩 r(M)=r<n,则它的 n 个行向量中( ).

A.任意一个行向量均可由其他 r 个行向量线性表示

B.任意 r 个行向量均可组成极大线性无关组

C.任意 r 个行向量均线性无关

D.必有 r 个行向量线性无关

6. 暂缺

7.下列对向量学习意义的描述:

①有助于学生体会数学与现实生活和其他学科的联系;

②有助于理解数学运算的意义和价值，发展运算能力;

③有助于掌握处理，几何问题的一种方法，体会数形结合思想;

④有助于理解数学不同内容之间存在广泛的联系.

其中正确的共有( ).

A.1 条

B.2 条

C.3 条

D.4 条

8.数学归纳法的推理方式属于( ).

A.归纳推理

B.演绎推理

C.类比推理

D.合情推理

二、简答题(本大题共 5 小题，每题 7 分，共 35 分)

9．有线性变换 $Y=AX+B$．变换矩阵 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$．

（1）求椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 经过线性变换后的方程．

（2）变换后，那些性质不变，那些性质变了（如：距离、斜率、相交）？

10．已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{\ln 5}{4}(x-1)$．

(1)求 f(x)和 g(x)围成的平面区域的面积.

(2)求 $0\le y\le f(x)$, $1\le x\le 3$,绕 y 轴旋转的体积.

11.一个袋子里有 8 个黑球，8 个白球，随机不放回连续取球 5 次，每次取出 1 个球，求最多取到 3 个白球的概率. .

12.给出数学文化的内容，请举出数学课堂中两个能够应用数学文化的例子.

13.简述数学建模的主要过程.

三、解答题(本大题 1 题, 10 分)

14.已知函数 f(x)在闭区间[a,b].上连续，且 f(a).f(b)<0,请用二分法证明 f(x)在(a,b)内至少有一个零点。

四、论述题(本大题 1 小题，15 分)

15.有人认为目前的教学缺乏对中学生思维能力的培养，请谈一谈你的看法，并说一说在老师在教学中应该如何做。

五、案例分析题(本大题 1 题, 20 分)

16.在学习了“直线与圆的位置关系”后，一位教师让学生解决如下问题:

求过点$P(2,3)$且与圆O：$(x-1)^2+y^2=1$相切的直线l的方程.

一位学生给出的解法如下：

由圆O的方程$(x-1)^2+y^2=1$，可得圆心O的坐标为$(1,0)$，圆的半径$r=1$.

设直线l的斜率为k，则直线l：$y-3=k(x-2)$，即$kx-y-2k+3=0$.

因为直线l与圆O相切，所以圆心O到直线l到距离为$d=\dfrac{|k-2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得：$k=\dfrac{4}{3}$，

所以直线l的方程为$4x-3y+1=0$.

（1）指出上述解法的错误之处，分析错误原因，并给出两种正确解法（14分）.

（2）针对该题的教学，谈谈如何设置问题，帮助学生避免出现上述错误（6分）.

六、教学设计题(本大题 1 小题，30 分)

17.普通高中课程标准 2017 版，对“导数的概念及其意义”提出的学习要求为:

①通过实例分析,经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景,知道导数是关于瞬时变化率的数学表达，体会导数的内涵与思想。

②体会极限思想。

③通过函数图象直观理解导数的几何意义。

针对导数的概念及其意义以达到①，完成教学设计。

(1)设计教学重点(6 分)。

(2)教学过程(导入、概念形成与巩固)，并写出设计意图(24 分)。

【参考答案】

一、单选题

1、A

2、A

3、B

4、C

5、D

6、C

7、D

8、B

二、简答题

9.【答案】（1）$(x-3)^2+(y-5)^2=1$；（2）见解析

【解析】（1）设椭圆上的点(x_1,y_1)在矩阵A对应的变换作用下得到(x,y)，则

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_1+3\\ \frac{1}{3}y_1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

则$\begin{cases}x_1=2x-6\\ y_1=3y-15\end{cases}$，代入椭圆方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$得$(x-3)^2+(y-5)^2=1$

(2) 在该变换条件下，①不变的性质:都是中心对称图形和轴对称图形，都是在某条件下点的轨迹所形成的对称图形;②变化的性质:图形形态发生了变化，不再以原点为中心点，不再与 x 轴和 y 轴相交，图形距离中心点的距离都相等。

10.【答案】(1)$3\ln 5-4$；(2)$9\pi\ln 3-4\pi$

【解析】

（1）由$\ln x=\frac{\ln 5}{4}(x-1)$，得$x=5$

$$\int_1^5\left[\ln x-\frac{\ln 5}{4}(x-1)\right]dx=\left[x(\ln x-x)-\frac{\ln 5}{4}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_1^5=3\ln 5-4$$

（2）求体积，即求$2\pi\int_1^3 x\ln x dx$

$$V=2\pi\int_1^3 x\ln x dx=2\pi\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_1^3=9\pi\ln 3-4\pi$$

11.【答案】$\frac{67}{78}$。

【解析】随机不放回连续取 5 个球，最多取到 3 个白球的对立事件是取到 4 个白球 1 个黑球或取到 5 个白球。其中，取 4 个白球 1 个黑球的概率为$\frac{C_8^4\cdot C_8^1}{C_{16}^5}$；取 5 个白球的概率为$\frac{C_8^5}{C_{16}^5}$。

故最多取到 3 个白球的概率$P=1-\frac{C_8^4\cdot C_8^1}{C_{16}^5}-\frac{C_8^5}{C_{16}^5}=\frac{67}{78}$。

12. [参考答案]数学是一门与概念、定理、公式相关的学科，教师在数学教学中渗透数学文化、设置与教学内容相关的且蕴含在现实生活中的数学文化、引导学生思考其中所隐含的数学知识和规律，对学生的数学学习具有巨大的帮

助。例如:
(1)在学习《整数和负数》时，“负数” 概念对学生来说相对抽象。教师可以在教学中渗透数学文化史:中国是最早提出负数的国家，《九章算术》 是最早、最完整介绍负数的古书，人们在求解方程时经常会遇到小数减大数的情形，为便于求解，便创造了负数;在古代为区分正负数，数学家创造了一种方法:用不同颜色的算筹来表示正、负数;中国古代不仅提出了负数的概念，还提出了整套的正、负数的运算法则，这些法则沿用至今。教师在教学中融入数学文化，让学生了解概念产生的背景和意义，利用概念与生活的相通性可以帮助学生更直观地理解概念。
(2)在教学《勾股定理》时，可以从毕达哥拉斯到朋友家做客的故事入手:毕达哥拉斯是古希腊最为著名的数学家之-，相传 2500 年前，他到朋友家做客，发现朋友家用地板砖铺成的地面反映出了直角三角形的三边关系。毕达哥拉斯发现直角三角形的三边关系的故事为《勾股定理》的教学提供了问题引入，学生通过思考故事中隐含的规律，从而进行猜想假设，再加上教师的演示将定理变得具体形象，学生能够更容易地总结出直角三角形的三边关系，即勾股定理。探究勾股定理相关的数学文化史的过程蕴含了丰富的数学思想方法，这对学生理解定理极为有利。
将数学文化渗透到数学教学中,将教材内容与数学文化巧妙结合起来，从数学文化中延伸出数学概念和规律，可以帮助学生理解相关内容。数学文化中蕴含的故事具有较强的趣味性，还可以激发学生的学习兴趣。
13. [参考答案]数学建模是运用数学思想、方法和知识解决实际问题的过程。建立和求解模型的过程包括:从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，用数学符号建立方程、不等式、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律，求出结果、并讨论结果的意义。具体如下:
(1)模型准备:了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息。以数学思想来包容问题的精髓，数学思路贯穿问题的全过程，进而用数学语言来描述问题。要求符合数学理论，符合数学习惯，清晰准确。
(2)模型假设:根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一-些恰当的假设。
(3)模型建立:在假设的基础上，利用适当的数学具来刻划各变量常量之间的数学关系，建立相应的数学结构(尽量用简单的数学工具)。
(4)模型求解:利用获取的数据资料，对模型的所有参数做出计算(或近似计算)。
(5)模型分析:对所要建立模型的思路进行阐述，对所得的结果进行数学上的分析。
(6)模型检验:将模型分析结果与实际情形进行比较，以此来验证模型的准确性、合理性和适用性。如果模型与实际较吻合，则要对计算结果给出其实际含义，并进行解释。如果模型与实际吻合较差，则应该修改假设，再次重复建模过程。
解答题(本大题 1 小题，10 分)
14. [答案]证明过程见解析。

【解析】先将$[a.b]$二等分为$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$，若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则结论成立；若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$，则$f(a)$和$f(b)$中必然有一个与$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$异号，记这个小区间为$[a_1,b_1]$，它满足$f(a_1)\cdot f(b_1)<0$且区间长度为$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$。

再将$[a_1,b_1]$二等分为$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$，$\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$，若$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$，则结论成立；若$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$，则$f(a_1)$和$f(b_1)$中必然有一个与$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$异号，记这个小区间为$[a_2,b_2]$，它满足$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]\subset[a,b]$，$b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$且$f(a_2)\cdot f(b_2)<0$。

采用二分法不断进行下去，可能出现两种情形：

（1）在某一区间的中点c_i上有$f(c_i)=0$，则结论成立；

（2）在任意区间的中点c_i上均有$f(c_i)\neq 0$，则得到闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，它满足：$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$，$n=1,2,\cdots$，$f(a_n)\cdot f(b_n)<0$。

由区间套定理，知存在点$x_0\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,\cdots$。若$f(x_0)=0$，则结论成立；若$f(x_0)\neq 0$，不妨设$f(x_0)>0$，则由局部保号性，知$\exists U(x_0;\delta)$，使得$f(x_0)>0$。根据区间套定理的推论，当n充分大时有$[a_n,b_n]\subset U(x_0;\delta)$，因而有$f(a_n)\cdot f(b_n)>0$。这与$f(a_n)\cdot f(b_n)<0$相矛盾，故必有$f(x_0)=0$，$x_0\in[a_n,b_n]$。

综上所述，$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则$f(x)=0$在$[a,b]$上至少有一个根。

四、论述题(本大题 1 小题，15 分)

15. [参考答案]现代教育观点认为，数学教学活动是数学活动的教学，即思维活动的教学。孔子说：“学而不思则罔，思而不学则殆”,养成良好的思维品质是教学改革中的一个重要课题，在数学学习中要使学生思维活跃，就要教会学生分析问题的基本方法，在如今的教育体制之下灌输式教学还是很常见，从而忽视了对学生学习思维的培养，这对于学生创新能力的培养是极其不利的，因此在教育体制改革的趋势之下，我们不仅要重视学生基本知识和基本技能的学习，更应该注重学生思维品质的培养。心理学家认为，培养学生的数学思维品质是培养和发展数学能力的突破

口。思维品质包括思维的深刻性、敏捷性、灵活性、批判性和创造性，它们反映了思维的不同方面的特征，因此在教学过程中应该有不同的培养手段。

思维的深刻性既是数学的性质决定了数学教学既要以学生为基础，又要培养学生的思维深刻性。数学思维的深刻性品质的差异集中体现了学生数学能力的差异，教学中培养学生数学思维的深刻性，实际上就是培养学生的数学能力。数学教学中应当教育学生学会透过现象看本质，学会全面地思考问题，养成追根究底的习惯。

数学思维的敏捷性主要反映了正确前提下的速度问题。因此，数学教学中，一方面可以考虑训练学生的运算速度，另一方面要尽量使学生掌握数学概念、原理的本质，提高所掌握的数学知识的抽象程度。因为所掌握的知识越本质、抽象程度越高，其适应的范围就越广泛，

检索的速度也就越快。另外，运算速度不仅仅是对数学知识理解程度的差异，而且还有运算习惯以及思维概括能力的差异。因此，数学教学中，应当时刻向学生提出速度方面的要求，使学生掌握速算的要领。

为了 培养学生的思维灵活性，应当增强数学教学的变化性，为学生提供思维的广泛联想空间，使学生在面临问题时能够从多种角度进行考虑，并迅速地建立起自己的思路，真正做到举一反三”。教学实践表明，变式教学对于培养学生思维的灵活性有很大作用。

五、案例分析题(本大题 1 小题，20 分)

[参考答案] (1) 该同学的解法没有考虑直线 L 斜率不存在的情况，没有掌握数学当中分类讨论的思想和斜率的定义。正确解法①如上同学做题步骤，且过论当斜率不存在时，直线 L 方程为 x=2 符合题意;②第二种做法可以先求出切点坐标，然后再求方程，易知切点为

$(\frac{1}{5},\frac{3}{5})$在考虑切线斜率不存在情况，可得切线方程为$4x-3y+1=0$或$x=2$。

六、教学设计题(本大题 1 小题，30 分)

17. [参考答案]

(1)教学重点:深刻理解在一点处导数的概念，能准确表达其定义；注意

$f'(x_0)=\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$这种形式的灵活应用；明确导数实际背景并给出物理、几何解释；能够从定义出发求某些函数在一点处的导数。

（2）教学过程：

①新课导入：以两个问题为背景引入导数的概念。

问题 1 （以变速直线运动的瞬时速度的问题的解决为背景）已知：自由落体运动方程为：

$s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$，$t\in[0,T]$，求：落体在t_0时刻（$t_0\in[0,T]$）的瞬时速度。

问题解决：设t为t_0的邻近时刻，则落体在时间段$[t_0,t]$（或$[t,t_0]$）上的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

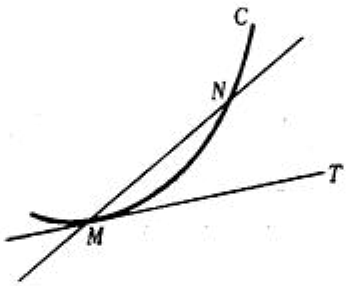
若$t\to t_0$时平均速度的极限存在，则极限

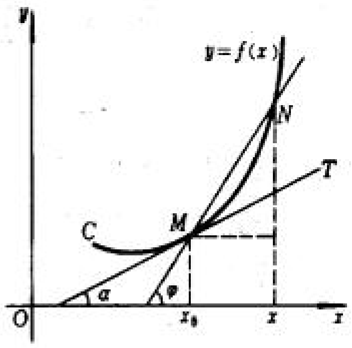
$$v=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

为质点在时刻t_0的瞬时速度。

问题2 （以曲线在某一点处切线的斜率的问题的解决为背景）已知：曲线$y=f(x)$上点$M(x_0,y_0)$，求：M点处切线的斜率。

下面给出切线的一般定义；设曲线C及曲线C上的一点M，如图，在M外C上另外取一点N，作割线MN，当N沿着C趋近点M时，如果割线MN绕点M旋转而趋于极限位置MT，直线MT就称为曲线C在点M处的切线。





问题解决：取在C上M附近一点$N(x,y)$，于是割线PQ的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ （φ为割线MN的倾角）

当$x\to x_0$时，若上式极限存在，则极限

$$k=\tan\alpha=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ （α 为割线 MT 的倾角）

为点 M 处的切线的斜率。

上述两问题中，第一个是物理学的问题，后一个是几何学问题，分属不同的学科，但问题的解决都归结到求形如

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (1)$$

的极限问题。事实上，在学习物理学时会发现，在计算诸如物质比热、电流强度、线密度等问题中，尽管其背景各不相同，但最终都化归为讨论形如（1）的极限问题。也正是这类问题的研究，促使“导数”的概念的诞生。

【设计意图】：通过实例使学生有机会经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程．借助直观的图像和数据，感悟在某一时刻的速度——瞬时速度是客观存在的，并与平均变化率存在必然的联系，及“以已知探求未知”的数学思想方法，让学生初步感受无限、逼近的思想．

②新课探究：

定义　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 f 在点 x_0 处可导，并称该极限为 f 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$。即

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

也可记作 $y'\big|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$。若上述极限不存在，则称 f 在点 x_0 处不可导。

f 在 x_0 处可导的等价定义：

设 $x = x_0 + \Delta x, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，若 $x \to x_0$ 则等价于 $\Delta x \to 0$，如果

函数 f 在点 x_0 处可导，可等价表达成为以下几种形式：

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\square \to 0} \frac{f(x_0 + \square) - f(x_0)}{\square} \qquad (5)$$

[设计意图]教学中遵循“学生为主体,教师为主导，训练为主线，发展思维为主旨”的“四主原则”。以恰当的系列活动为纽带，给学生创设自主探究、合作交流的时间与空间，引导学生经历数学知识再发现的过程，让学生在参与中获取知识，发展思维，感悟数学。

③巩固概念:利用导数定义求是数的几个例子

例1 求 $f(x)=x^2$ 在点 $x=1$ 处的导数。

解 由定义

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$$

例2 设函数 $f(x)$ 为偶函数，$f'(0)$ 存在，证明：$f'(0)=0$。

证 $\because f(x)=f(-x)\quad \therefore f(\Delta x)=f(-\Delta x)$

又 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[0+(-\Delta x)]-f(0)}{-\Delta x}=-f'(0)$$

$\therefore f'(0)=0$

注意：$f'(x_0)=\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$ 这种形式的灵活应用。此题的$\square$为$\boxed{-\Delta x}$。

[设计意图]加深学生对导数内涵的理解，熟练应用导数的概念进行运算，提炼求导步骤由特殊到一般，完成思维的飞跃。通过具体例题的分析，加深学生对导数内涵的理解，体验数学在实际生活中的应用。