中学数学学科知识与教学能力高频考点

按照历年考试情况，233 网校预计数学学科知识与教学能力《初级中学》以及《高级中学》考题将延续以往的命题思路，作答时间依旧为 120 分钟，试卷满分 150 分；考题题型为单项选择题、简答题、解答题、论述题、案例分析题、教学设计题六个题型；考试内容包含数学分析、高等代数、空间解析几何、统计与概率、课标及教学论、高中知识、初中知识，共七个模块。下面将从考情分析、课程标准、教学知识、教学技能和常考数学公式给大家梳理数学学科知识与教学能力的高频考点。

一、考情分析

（一）试卷结构

考试时间 120 分钟，考试总分 150 分，各题型数量、分值一直较稳定，总共三种题型：

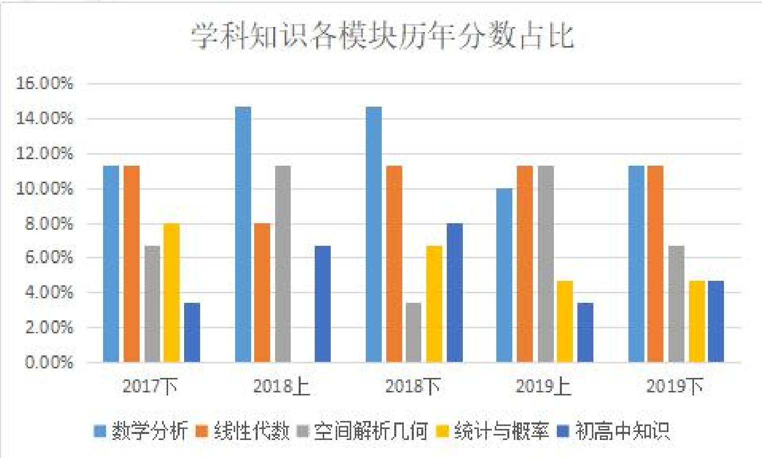
题型	题量与分值	占比
单项选择题	共 8 题，每道 5 分，总计 40 分	26.7%
简答题	共 5 题，每题 7 分，总计 35 分	23.3%
解答题	共 1 题，每题 10 分，总计 10 分	6.7%
论述题	共 1 题，每题 15 分，总计 15 分	10%
案例分析题	共 1 题，每题 20 分，总计 20 分	13.3%
教学设计题	共 1 题，每题 30 分，总计 30 分	20%

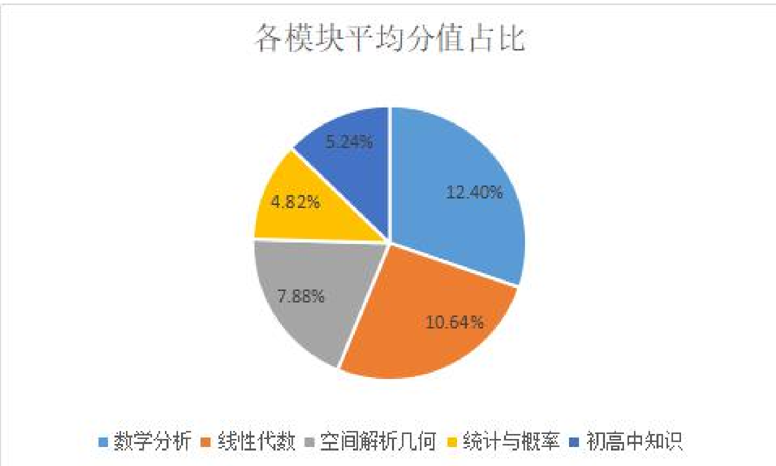
（二）考试内容

数学学科知识与能力主要包括四个模块的内容：学科知识、课程知识、教学知识与教学技能，每个模块所对应的题型为：

模块	比例	题型
学科知识	41%	单项选择题 简答题 解答题
课程知识	18%	单项选择题 简答题 论述题
教学知识	8%	单项选择题 简答题
教学技能	33%	案例分析题 教学设计题
合　计	100%	单项选择题：约 27% 非选择题：约 73%

学科知识占比最大，考察的是整个数学学科体系的知识，具体包含的知识点为：





由此可见，学科知识部分以大学高等数学知识为主，占比排序为：数学分析>线性代数>空间解析几何>初高中知识>线性代数，考察的知识点较繁多，难度比较大，备考时需特别留意。

（三）题型展示

1.单项选择题

在高等代数中，有一种线性变换叫做正交变换，即不改变任意两点距离的变换。下列变换中不是正交变换的是

A. 平移变换　　B. 旋转变换

C. 反射变换　　D. 相似变换

2．简答题

（1）为什么 （-1）＋（-1）=(-2)?

（2）一位教师讲了一堂公开课《函数》，多数听课教师认为他讲出了函数概念的本质，但课堂教学有效性不足，突出表现在课堂提问方面。你认为应注意哪些问题才能提高课堂提问的有效性（请结合自己对《函数》的教学设想来谈）？

3．解答题

已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=1, q=2$，又第m项至第n项的和为 112（$m<n$），求$m+n$的值。

4．论述题

在必修模块中，将平面解析几何内容放在函数与立体几何之后，对这种安排谈谈你的看法。

5．案例分析题

阅读下面教学片段，结合案例，阐述数学教学中预设与生成的关系。

张老师在讲授“等腰三角形三线合一定理”时，提出如下问题：如图，等腰ΔABC 中，AD 是底边 BC 上的中线，$\angle BAD=\angle CAD$，试问 AD 还具有什么性质？

学生：AD 把ΔABC分成两个全等的三角形。

（学生发现重要结论，但却不符合教师的教学设计，于是老师进行了“诱导”）

教师：AD 和 BC 是什么关系？

学生：$AD>BC$。

（教师唯恐浪费时间，直奔教学主题）

教师：AD 和 BC 垂直不垂直？

学生：（原来如此）$AD\perp BC$.

教师：那么 AD 是ΔABC的什么线？

学生：AD 是底边 BC 上的高。

（教师认为达到了预期目的，叹了口气，却没有继续追究$AD\perp BC$的原因）.

6．教学设计题

就高中数学“人教版教材”必修 1 第一单元中的函数概念第一课时的内容，设计一个教学方案（将提供教材内容）。

二、课程标准

义务教育数学课程标准

（一）设计思路：

（1）学段划分

为了体现义务教育阶段数学课程的整体性，《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》（以下简称《标准》）通盘考虑了九年的课程内容；同时，根据儿童发展的生理和心理特征，将九年的学习时间具体划分为三个学段：第一学段（1～3 年级）、第二学段（4～6 年级）、第三学段（7～9 年级）。

（2）课程目标

根据《基础教育课程改革纲要（试行）》，结合数学教育的特点，《标准》明确了义务教育阶段数学课程的总目标，并从知识与技能、数学思考、解决问题、情感与态度等四个方面作出了进一步的阐述。

（3）课程内容

在各个学段中，《标准》安排了"数与代数""空间与图形""统计与概率""实践与综合应用"四个学习领域。课程内容的学习，强调学生的数学活动，发展学生的**数感、符号感、空间观念、统计观念，以及应用意识与推理能力。**

①　数感主要表现在：理解数的意义；能用多种方法来表示数；能在具体的情境中把握数的相对大小关系；能用数来表达和交流信息；能为解决问题而选择适当的算法；能估计运算的结果，并对结果的合理性作出解释。

②　符号感主要表现在：能从具体情境中抽象出数量关系和变化规律，并用符号来表示；理解符号所代表的数量关系和变化规律；会进行符号间的转换；能选择适当的程序和方法解决用符号所表达的问题。

③　空间观念主要表现在：能由实物的形状想像出几何图形，由几何图形想像出实物的形状，进行几何体与其三视图、展开图之间的转化；能根据条件做出立体模型或画出图形；能从较复杂的图形中分解出基本的图形，并能分析其中的基本元素及其关系；能描述实物或几何图形的运动和变化；能采用适当的方式描述物体间的位置关系；能运用图形形象地描述问题，利用直观来进行思考。

④ 统计观念主要表现在：能从统计的角度思考与数据信息有关的问题；能通过收集数据、描述数据、分析数据的过程作出合理的决策，认识到统计对决策的作用；能对数据的来源、处理数据的方法，以及由此得到的结果进行合理的质疑。

⑤ 应用意识主要表现在：认识到现实生活中蕴含着大量的数学信息、数学在现实世界中有着广泛的应用；面对实际问题时，能主动尝试着从数学的角度运用所学知识和方法寻求解决问题的策略；面对新的数学知识时，能主动地寻找其实际背景，并探索其应用价值。

⑥ 推理能力主要表现在：能通过观察、实验、归纳、类比等获得数学猜想，并进一步寻求证据、给出证明或举出反例；能清晰、有条理地表达自己的思考过程，做到言之有理、落笔有据；在与他人交流的过程中，能运用数学语言合乎逻辑地进行讨论与质疑。

（二）课程目标

① 获得适应未来社会生活和进一步发展所必需的重要数学知识（包括数学事实、数学活动经验）以及基本的数学思想方法和必要的应用技能；

② 初步学会运用数学的思维方式去观察、分析现实社会，去解决日常生活中和其他学科学习中的问题，增强应用数学的意识；

③ 体会数学与自然及人类社会的密切联系，了解数学的价值，增进对数学的理解和学好数学的信心；

④ 具有初步的创新精神和实践能力，在情感态度和一般能力方面都能得到充分发展。

（三）课程内容

本部分分别阐述各个学段中"数与代数""空间与图形""统计与概率""实践与综合应用"四个领域的内容标准。

"数与代数"的内容主要包括数与式、方程与不等式、函数，它们都是研究数量关系和变化规律的数学模型，可以帮助人们从数量关系的角度更准确、清晰地认识、描述和把握现实世界。

"空间与图形"的内容主要涉及现实世界中的物体、几何体和平面图形的形状、大小、位置关系及其变换，它是人们更好地认识和描述生活空间并进行交流的重要工具。

"统计与概率"主要研究现实生活中的数据和客观世界中的随机现象，它通过对数据收集、整理、描述和分析以及对

事件发生可能性的刻画，来帮助人们作出合理的推断和预测。

"实践与综合应用"将帮助学生综合运用已有的知识和经验，经过自主探索和合作交流，解决与生活经验密切联系的、具有一定挑战性和综合性的问题，以发展他们解决问题的能力，加深对"数与代数""空间与图形""统计与概率"内容的理解，体会各部分内容之间的联系。

第一学段（1～3 年级）

（1）数与代数

在本学段中，学生将学习万以内的数、简单的分数和小数、常见的量，体会数和运算的意义，掌握数的基本运算，探索并理解简单的数量关系。

在教学中，要引导学生联系自己身边具体、有趣的事物，通过观察、操作、解决问题等丰富的活动，感受数的意义，体会数用来表示和交流的作用，

初步建立数感；应重视口算，加强估算，提倡算法多样化；应减少单纯的技能性训练，避免繁杂计算和程式化地叙述"算理"。

（2）空间与图形

在本学段中，学生将认识简单几何体和平面图形，感受平移、旋转、对称现象，学习描述物体相对位置的一些方法，进行简单的测量活动，建立初步的空间观念。

在教学中，应注重所学知识与日常生活的密切联系；应注重使学生在观察、操作等活动中，获得对简单几何体和平面图形的直观经验。

（3）统计与概率

在本学段中，学生将对数据统计过程有所体验，学习一些简单的收集、整理和描述数据的方法，能根据统计结果回答一些简单的问题，初步感受事件发生的不确定性和可能性。

在教学中，应注重借助日常生活中的例子，让学生经历简单的数据统计过程；应注重对不确定性和可能性的直观感受。

（4）实践活动

在本学段中，学生通过实践活动，初步获得一些数学活动的经验，了解数学在日常生活中的简单应用，初步学会与他人合作交流，获得积极的数学学习情感。

教学时，应首先关注学生参与活动的情况，引导学生积极思考、主动与同伴合作、积极与他人交流，使学生增进运用数学解决简单实际问题的信心，同时意识到自己在集体中的作用。

第二学段（4～6 年级）

（1）数与代数

在本学段中，学生将进一步学习整数、分数、小数和百分数及其有关运算，进一步发展数感；初步了解负数和方程；开始借助计算器进行复杂计算和探索数学问题；获得解决现实生活中简单问题的能力。

教学时，应通过解决实际问题进一步培养学生的数感，增进学生对运算意义的理解；应重视口算，加强估算，鼓励算法多样化；应使学生经历从实际问题中抽象出数量关系，并运用所学知识解决问题的过程；应避免繁杂的运算，避免将运算与应用割裂开来，避免对应用题进行机械的程式化训练。

（2）空间与图形

在本学段中，学生将了解一些简单几何体和平面图形的基本特征，进一步学习图形变换和确定物体位置的方法，发展空间观念。

在教学中，应注重使学生探索现实世界中有关空间与图形的问题；应注重使学生通过观察、操作、推理等手段，逐步认识简单几何体和平面图形的形状、大小、位置关系及变换；应注重通过观察物体、认识方向、制作模型、设计图案等活动，发展学生的空间观念。

（3）统计与概率

在本学段中，学生将经历简单的数据统计过程，进一步学习收集、整理和描述数据的方法，并根据数据分析的结果作出简单的判断与预测；将进一步体会事件发生可能性的含义，并能计算一些简单事件发生的可能性。

在教学中，应注重所学内容与现实生活的密切联系；应注重使学生有意识地经历简单的数据统计过程，根据数据作出简单的判断与预测，并进行交流；应注重在具体情境中对可能性的体验；应避免单纯的统计量的计算。

（4）综合应用

在本学段中，学生将通过数学活动了解数学与生活的广泛联系，学会综合运用所学的知识和方法解决简单的实际问题，加深对所学知识的理解，获得运用数学解决问题的思考方法,并能与他人进行合作交流。

教学时，应引导学生从不同角度发现实际问题中所包含的丰富的数学信息，探索多种解决问题的方法，并鼓励学生尝试独立地解决某些简单的实际问题。

第三学段（7～9 年级）

（1）数与代数

在本学段中，学生将学习实数、整式和分式、方程和方程组、不等式和不等式组、函数等知识，探索数、形及实际问题中蕴涵的关系和规律，初步掌握一些有效地表示、处理和交流数量关系以及变化规律的工具，发展符号感，体会数学与现实生活的紧密联系，增强应用意识，提高运用代数知识与方法解决问题的能力。

在教学中，应注重让学生在实际背景中理解基本的数量关系和变化规律，注重使学生经历从实际问题中建立数学模型、估计、求解、验证解的正确性与合理性的过程，应加强方程、不等式、函数等内容的联系，介绍有关代数内容的几何背景；应避免繁琐的运算。

（2）空间与图形

在本学段中，学生将探索基本图形（直线形、圆）的基本性质及其相互关系，进一步丰富对空间图形的认识和感受，学习平移、旋转、对称的基本性质，欣赏并体验变换在现实生活中的广泛应用，学习运用坐标系确定物体位置的方法，发展空间观念。

推理与论证的学习从以下几个方面展开：在探索图形性质、与他人合作交流等活动过程中，发展合情推理，进一步学习有条理地思考与表达；在积累了一定的活动经验与掌握了一定的图形性质的基础上，从几个基本的事实出发，证明一些有关三角形、四边形的基本性质，从而体会证明的必要性，理解证明的基本过程，掌握用综合法证明的格式，初步感受公理化思想。

在教学中，应注重所学内容与现实生活的联系，注重使学生经历观察、操作、推理、想像等探索过程；应注重对证明本身的理解，而不追求证明的数量和技巧。证明的要求控制在《标准》所规定的范围内。

（3）统计与概率

（4）综合与实践

补充：高中数学课程标准（考高中教师资格证的同学看）

1. 高中数学课程的地位和作用：

(1) 高中数学课程是义务教育后普通高级中学的一门主要课程，它包含了数学中最基本的内容，是培养公民素质的基础课程。

(2) 高中数学对于认识数学与自然界、数学与人类社会的关系，提高提出问题、分析和解决问题的能力，形成理性思维，发展智力和创新意识具有基础性的作用。

(3) 高中数学课程有助于学生认识数学的应用价值，增强应用意识。

(4) 高中数学是学习高中物理、化学等其他课程的基础。

2. 高中数学课程的基本理念：

(1) 高中数学课程的定位：面向全体学生；不是培养数学专门人才的基础课。

(2) 高中数学增加了选择性（整个高中课程的基本理念）：为学生发展、培养自己的兴趣、特长提供空间。

(3) 让学生成为学习的主人：倡导自主学习、合作学习；帮助学生养成良好的学习习惯。

(4) 提高学生数学应用意识：是数学科学发展的要求；是培养创新能力的需要；是培养学习兴趣的需要；是培养自信心的需要；数学应用的广泛性需要学生具有应用意识。

(5) 强调培养学生的创新意识：强调发现和提出问题；强调归纳、演绎并重；强调数学探究、数学建模。

(6) 重视“双基”的发展（数学基础知识和基本能力）：理解基本的数学概念和结论的本质；强调概念、结论产生的背景；强调体会其中所蕴含的数学思想方法。

(7) 强调数学的文化价值：数学是人类文化的重要组成部分；《新课标》强调了数学文化的重要作用。

(8) 全面地认识评价：学习结果和学习过程；学习的水平和情感态度的变化；终结性评价和过程性评价。

3. 高中数学课程的目标：

(1) 总目标：使学生在九年义务教育数学课程的基础上，进一步提高作为未来公民所必要的数学素养，以满足个人发展与社会进步的需要。

(2) 三维目标：知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观

(3) 把“过程与方法”作为课程目标是本次课程改革最大的变化之一。

(4) 五大基本能力：计算能力、逻辑推理能力、空间想象能力、抽象概括能力、数据处理能力

4. 高中数学课程的内容结构：

(1) 必修课程（每模块 2 学分，36 学时）：数学 1（集合、函数）、数学 2（几何）、数学 3（算法、统计和概率）、数学 4（三角函数、向量）、数学 5（解三角形、数列、不等式）

(2) 选修课程（每模块 2 学分，36 学时；每专题 1 学分，18 学时）：

① 选修系列 1（文科系列，2 模块）：1-1（“或且非”、圆锥曲线、导数）、1-2（统计、推理与证明、复数、框图）

② 选修系列 2（理科系列，3 模块）：2-1（“或且非”、圆锥曲线、向量与立体几何）、2-2（导数、推理与证明、复数）、2-3（技术原理、统计案例、概率）

③ 选修系列 3（6 个专题）

④ 选修系列 4（10 个专题）

5. 高中数学课程的主线：

函数主线、运算主线、几何主线、算法主线、统计概率主线、应用主线。

6. 教学建议：

(1) 以学生发展为本，指导学生合理选择课程、制定学习计划

(2) 帮助学生打好基础，发展能力：

① 强调对基本概念和基本思想的理解和掌握

② 重视基本技能的训练

③ 与时俱进地审视基础知识与基本能力

(3) 注重联系，提高对数学整体的认知

(4) 注重数学知识与实际的联系，发展学生的应用意识和能力

(5) 关注数学的文化价值，促进学生科学观的形成

(6) 改善教与学的方式，使学生主动地学习

(7) 恰当运用现代信息技术，提高教学质量

7. 评价建议：

(1) 重视对学生数学学习过程的评价

(2) 正确评价学生的数学基础知识和基本能力

(3) 重视对学生能力的评价（问题意识、独立思考、交流与合作、自评与互评）

(4) 实施促进学生发展的多元化评价（尊重被评价对象）

(5) 根据学生的不同选择进行评价

三、教学知识

1.教学原则

抽象与具体相结合、严谨性与量力性相结合原则（“循序渐进”）、理论与实际相结合原则（“学以致用”）、巩固与发展相结合原则（“温故而知新”）

2.教学过程

备课（备教材、备学生、备教法）、课堂教学（组织教学、复习提问、讲授新课、巩固新课、布置作业）、课外工作（作业批改、课外辅导、数学补课活动）、成绩的考核与评价（口头考察、书面考察）、教学评价（导向作用、鉴定作用、诊断作用、信息反馈与决策调控作用）

3.教学方法

(1) 讲授法：科学性、系统性（循序渐进）、启发性、量力性（因材施教）、艺术性（教学语言）

(2) 讨论法：体现“学生是学习的主体”的特点。

(3) 自学辅导法：卢仲衡教授提出，要求学生肯自学、能自学、会自学、爱自学

(4) 发现法：又称问题教学法（布鲁纳），步骤是创设问题情境；寻找问题答案，探讨问题解法；完善问题解答，总结思路方法；知识综合，充实改善学生的知识结构。

4.概念教学

(1) 概念的内涵与外延：当概念的内涵扩大时，则概念的外延就缩小；当概念的内涵缩小时，则概念的外延就扩大。内涵和外延之间的这种关系，称为反变关系。

(2) 概念间的逻辑关系：相容关系（同一关系如“等边三角形”和“正三角形”、交叉关系如“等腰三角形”和“直角三角形”、包含关系如“菱形”和“四边形”）、不相容关系（对立关系如“正数”和“负数”、矛盾关系如“负数”和“非负数”）

(3) 概念下定义的常见方式：属加种差定义法（被定义的概念=最邻近的属概念+种差，如“有一个角是直角的平行四边形是矩形”）、解释外延定义法（不易揭示其内涵，如“有理数和无理数统称实数”）、描述性定义法（用简明清晰的语言描述，如“ $f(x)=x^{\alpha}$”）

(4) 数学概念获得的主要方式：概念形成（由学生发现）、概念同化（教师直接展示定义）

5.命题教学：

整体性策略（旨在加强命题知识的横、纵向联系）、准备性策略（教学实施之前）、问题性策略（激发学生的积极性）、情境化教学、过程性策略（暴露命题产生于证明的“所以然”过程）、产生式策略（变式练习）

6.推理教学

(1) 推理的结构：任何推理都是由前提和结论两部分组成的

(2) 推理的形式：演绎推理（由一般到特殊；前提真，结论真；三段论：大前提、小前提，得推理）、归纳推理（由特殊到一般）、类比推理（由特殊到特殊）

7.问题解决教学

(1) 数学问题的设计原则：可行性原则、渐进性原则、应用性原则

(2) 纯粹数学问题解决：波利亚怎样解题表（分析题意；拟定计划；执行计划；验算所得到的解）

(3) 非常规问题解决：建模分析（分析问题背景，寻找数学联系；建立数学模型；求解数学模型；检验；交流和评价；推广）

8.学习方式：自主学习、探究学习、合作学习

四、教学技能

1.教学设计

(1) 课堂教学设计就是在课堂教学工作进行之前，以现代教育理论为基础，应用系统科学方法分析研究课堂教学的问题，确定解决问题的方法和步骤，并对课堂教学活动进行系统安排的过程。

(2) 教学设计与教案的关系：

① 内容不同：

教学设计的基本组成既包括教学过程，也包括指导思想与理论依据、教学背景分析、对学生需要的分析、学习内容分析、教学方法与策略的选定、教学资源的设计与使用以及学习效果评价等。侧重运用现代教学理论进行分析，不仅说明教什么、如何教，而且说明为什么这样教；教案的基本组成是教学过程，侧重教什么、如何教。

② 核心目的不同：

教学设计不仅重视教师的教，更重视学生的学，以及怎样使学生学得更好。达到更好的教学效果是教学设计的核心目的；教案的核心目的就是教师怎样讲好教学内容。

③ 范围不同：

从研究范围上讲，教案只是教学设计的一个重要内容。

(3) 数学课堂教学设计的意义：

① 使课堂教学更规范、操作性更强

② 使课堂教学更科学

③ 使课堂教学过程更优化

(4) 数学课堂教学设计的基本要求：

① 充分体现数学课程标准的基本理念，努力体现以学生发展为本

② 适应学生的学习心理和年龄特征

③ 重视课程资源的开发和利用

④ 注重预设与生成的辩证统一

⑤ 辩证认识和处理教学中的多种关系

⑥ 整体把握教学活动的结构

(5) 数学教学设计的准备：

① 认真学习新课标，了解当前我国数学课程的目标要求

② 全面关注学生需求

③ 认真研读数学教材和参考书，领悟编写意图

④ 广泛涉猎数学教育的其他优秀资源，吸取他人精华，丰富自己的教学设计

⑤ 制定学期教学计划、单元教学计划

(6) 教材分析

① 分析和处理教材是教学设计的基本环节和核心任务

② 整体系统的观念用教材

③ 理解教材的编排意图

④ 突出教材的重点和难点

(7) 学情分析

① 分析学生原有的认知基础

② 分析学生的个体差异

③ 了解学生的生理、心理

④ 了解学生对本学科学习方法的掌握情况

⑤ 分析学习知识时可能要遇到的困难

(8) 制定合理教学目标的要求

① 反映学科特点，体现内容本质

② 要有计划性，可评价性

③ 格式要规范，用词要考究

④ 要全面，不能“重知轻思”、“重知轻情”等

⑤ 注意教学目标的层次性（记忆、理解、探究）

⑥ 要实在具体，不浮华

(9) 教学反思

① 教学反思的内容：对教学设计、教学过程、教学效果、个人经验的反思

② 教学反思的步骤：截取课堂教学片段及其相关的教学设计；提炼反思的问题；个人撰写反思材料；集体讨论；个人再反思，并撰写反思论文

(10) 教学设计的撰写：

① 教学目标：知识与技能（了解、掌握、应用）；过程与方法（提高能力）；情感态度与价值观（体验规律、培养看问题的方法）

② 学情分析

③ 教材分析：本节课的作用和地位；本节课的主要内容；重难点分析

④ 教学理念

⑤ 教学策略

⑥ 教学环境

⑦ 教学过程

⑧ 教学反思

2.教学实施

(1) 课堂导入：直接导入法、复习导入法、事例导入法（情境导入法）、趣味导入法、悬念导入法

(2) 课堂提问的原则：目的性原则、启发性原则、适度性原则、兴趣性原则、循序渐进性原则、全面性原则、充分思考性原则、及时评价性原则

(3) 课堂提问的类型：复习回忆提问、理解提问、应用提问、归纳提问、比较提问、分析综合提问、评价提问

(4) 学生活动：

① 学生活动体现了学生在学习中的主体地位

② 作为教学环节之一的“学生活动”是意义建构的组成部分

③ 学生活动的目的是促进学生的理解

④ 从总体上说，学生活动必须是思维活动

(5) 课堂结束技能的实施方法：练习法、比较法与归纳法、提问法和答疑法、呈上法和启下法、发散法和拓展法

(6) 结束技能实施时应注意的问题：自然贴切，水到渠成；语言精练，紧扣中心；内外沟通，立疑开拓

3.教学评价

(1) 数学教育评价的要素：教学目标、教学内容、教学方法、教学心理环境、教师行为、学生行为、教学效果

(2) 数学教育评价的功能：管理功能、导向功能、调控功能、激发功能、诊断功能

五、常考数学公式

(一)函数、导数

1. 函数的单调性

(1) 设 x_1、$x_2\in[a,b]$且 $x_1<x_2$。那么

$f(x_1)-f(x_2)<0$ $f(x)$在 $[a,b]$上是增函数；

$f(x_1)-f(x_2)>0$ $f(x)$在 $[a,b]$上是减函数。

(2) 设函数 $y=f(x)$在某个区间内可导，若 $f'(x)>0$，则在该区间内 $f(x)$为增函数；若 $f'(x)<0$，则在该区间内 $f(x)$为减函数

2. 函数的奇偶性（该函数的定义域关于原点对称）

对于定义域内任意的 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$是偶函数；

对于定义域内任意的 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$是奇函数。

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y轴对称。

3. 函数在点x_0处的导数的几何意义

函数 $y=f(x)$在点 x_0处的导数 $f'(x_0)$是曲线 $y=f(x)$在 $P(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率，相应的切线方程是 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。

4. 几种常见函数的导数

$C'=0$（C 为常数）； $(a^x)'=a^x\ln a$；

$(x^n)'=nx^{n-1}$（ $n\in Q$）； $(e^x)'=e^x$；

$(\sin x)'=\cos x$； $(\cos x)'=-\sin x$；

$(\arcsin x)'=-(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

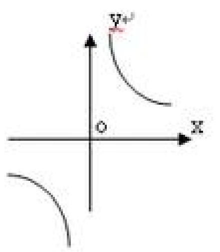
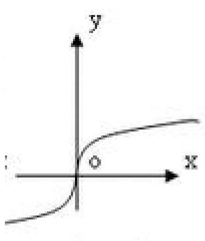
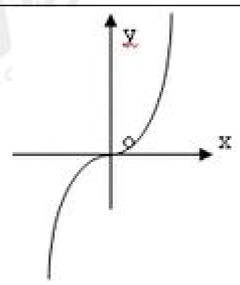
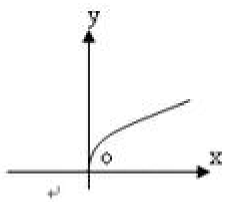
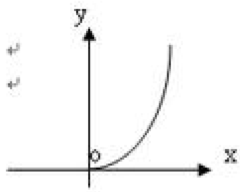
$(\arctan x)'=-(\operatorname{arccot} x)'=\frac{1}{1+x^2}$；

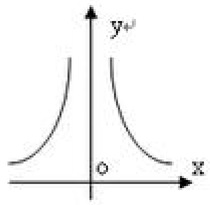
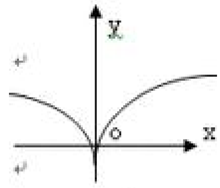
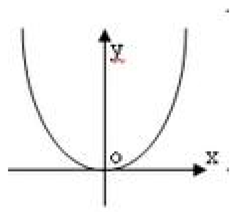
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$； $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$；

5. 导数的运算法则

$(u\pm v)'=u'\pm v'$； $(uv)'=u'v+uv'$； $u=f(x)$，$v=g(u)$，$v'=g'(u)u'$

6. 幂函数$f(x)=x^\alpha$（$\alpha\in R$，$\alpha\neq 1$）

$\alpha=\frac{p}{q}$	$\alpha<0$	$0<\alpha<1$	$\alpha>1$	性质
为奇数，为奇数				奇函数
为奇数，为偶数				

为偶数， 为奇数				偶函数
第一象限图像	减函数	增函数	增函数	过定点 (

7. 求函数$y=f(x)$的极值的方法:解方程$f'(x)=0$。当$f'(x_0)=0$时:

(1) 如果在 x_0附近的左侧 $f'(x_0)>0$，右侧 $f'(x_0)<0$，则 $f(x_0)$是极大值;

(2) 如果在 x_0附近的左侧 $f'(x_0)<0$，右侧 $f'(x_0)>0$，则 $f(x_0)$是极小值;

8. 凹凸函数：设$f(x)$在开区间I上存在二阶导数：

(1) 若对任意 $x\in\mathrm{I}$，有 $f''(x)>0$，则 $f(x)$在 I上为下凸函数;

(2) 若对任意 $x\in\mathrm{I}$，有 $f''(x)<0$，则 $f(x)$在 I上为上凸函数;

（二）三角函数、三角变换、解三角形、向量

9. 同角三角函数的基本关系式

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \tan\theta\ \cot\theta=1$$

10. 正弦、余弦的诱导公式

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha\right)=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}}\sin\alpha & (k\text{ 为偶数})\\(-1)^{\frac{k-1}{2}}\cos\alpha & (k\text{ 为奇数})\end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{k\pi}{2}\pm\alpha\right)=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}}\cos\alpha & (k\text{ 为偶数})\\(-1)^{\frac{k+1}{2}}\sin\alpha & (k\text{ 为奇数})\end{cases}$$

11. 和角与差角公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha \pm \varphi)$(辅助角 φ 所在象限由点 (a,b) 的象限决定, $\tan\theta = \frac{b}{a}$)

12. 二倍角公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

13. 三角函数的周期

函数 $y = A\sin(\omega\alpha + \varphi)$, $x \in R$ 及函数 $y = A\cos(\omega\alpha + \varphi)$, $x \in R$ (A, ω, φ 为常数，且 $A \neq 0$, $\omega > 0$)的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$;函数 $y = A\tan(\omega\alpha + \varphi)$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$(A, ω, φ 为常数，且 $A \neq 0$, $\omega > 0$ ）的周期 $T = \frac{\pi}{\omega}$。

14. 三角函数的图像变换：

(1) 函数 $y = A\sin(\omega\alpha + \varphi)$, $x \in R$ 即 $y = \sin x$ 横坐标伸长（ $0 < \omega < 1$ ）或缩短（ $\omega > 1$ ）到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，再向左 ($\frac{\varphi}{\omega} > 0$) 或向右 ($\frac{\varphi}{\omega} < 0$) 平移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位，最后纵坐标伸长 ($A > 1$) 或缩短（ $0 < A < 1$）到原来的 A 倍。

(2) 函数 $y = A\sin(\omega\alpha + \varphi)$, $x \in R$ 即 $y = \sin x$ 向左（ $\varphi > 0$ ）或向右（ $\varphi < 0$ ）平移 $|\varphi|$ 个单位，再横坐标伸长（ $0 < \omega < 1$ ）或缩短（ $\omega > 1$ ）到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，再，最后纵坐标伸长（ $A > 1$）或缩短（ $0 < A < 1$）到原来的 A 倍。

15. 正弦定理

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$是 ΔABC 外接圆的半径）

16. 余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$; $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$; $c=a^2+b^2-2ab\cos C$

17. 三角形面积公式

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$

18. **a** 与 **b** 的数量积（或内积）

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta$（$\theta$是向量 **a**，**b** 的夹角）

19. 向量的坐标运算

(1) 设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$,则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_1-z_2)$;

(2) 设 $\mathbf{a}(x_1,y_1,z_1)$，$\mathbf{b}(x_2,y_2,z_2)$,则 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;

(3) 设 $\mathbf{a}(x,y,z)$，则 $|\mathbf{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

20. 两向量的夹角公式

设 $\mathbf{a}(x_1,y_1,z_1)$，$\mathbf{b}(x_2,y_2,z_2)$,且 $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$，则 $\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}$。

21. 向量的平行与垂直

$\mathbf{a}//\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$;

$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}(a\neq\mathbf{0})\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

（三）数列、集合与命题

22. 数列的通项公式与前n项的和的关系

$a_n=\begin{cases}S_1 & n=1\\ S_n-S_{n-1} & n\geq 2\end{cases}$（数列 $\{a_n\}$的前 n项的和为 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$）

23. 等差数列的通项公式和前n项和公式

$a_n = a_1 + (n-1)d$; $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

24. 等比数列的通项公式和前n项和公式

$a_n = a_1 q^{n-1}$; $S_n = \begin{cases} na_1, & q=1 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}$

25. 数列求和常见结论：

$\frac{1}{pq} = \frac{1}{q-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ ($p < q$) ；

$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$；

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$。

26. 有n个元素的集合，含有2^n个子集，2^n-1个真子集。

27. 原命题：若p则q；否命题：若$\neg p$则$\neg q$；命题的否定：若p则$\neg q$。

28. 全称量词即“所有”，“全部”，可写作“$\forall$”；存在量词又称特称量词，写作“$\exists$”。

（四）不等式

29. 均值不等式

设 $a, b \in R^+$， $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 a = b 时取“=”号)

30. 柯西不等式

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$，其中 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in R^+$，当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$时不等式取等号。

31. Jensen 不等式

$$\frac{[f(a)+f(b)+f(c)]}{3} \leq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

32. 三角不等式：$||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}||\le|\mathbf{a}\pm\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$

33. 指数不等式：$a^{f(x)}>b(a>0,b>0)\Longleftrightarrow f(x)\lg a>\lg b$

（五）解析几何与立体几何

34. 直线的五种方程

(1) 点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$（直线l过点(x_0,y_0)，且斜率为k）

(2) 斜截式：$y=kx+b$（b 为直线l在 y 轴上的截距）

(3) 两点式：$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$（直线$l$过点$(x_1,y_1)(x_2,y_2)$，且$x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$）

(4) 截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$（$a$、b 分别为直线的横、纵截距，$a,b\neq0$）

(5) 一般式：$Ax+By+C=0$（其中 A、B 不同时为 0）

35. 两条直线的平行和垂直

若l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$

(1) $l_1//l_2\Longleftrightarrow k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$；

(2) $l_1\perp l_2\Longleftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$

36. 点(x_0,y_0)到直线l：$Ax+By+C=0$的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

37. 角平分线所在直线的方程

$\tan\alpha=\frac{k-k_1}{1+k\cdot k_1}=\frac{k_2-k}{1+k\cdot k_2}$，其中$k_1$、$k_2$分别为角的边所在直线的斜率，$2\alpha$为原角的大小

38. 圆的三种方程

(1) 圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$

(2) 圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

(3) 圆的参数方程：$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$

39. 两个圆的公共弦所在方程

$$(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)-(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

40. 椭圆、双曲线、抛物线的图形、定义、标准方程、几何性质

椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$a^2-c^2=b^2$，离心率 $e=\frac{c}{a}<1$，准线 $x=\pm\frac{a^2}{c}$，参数方程是 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$，椭圆上的点与两个定点 $F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$ 的距离之和等于常数（$2a$）。

双曲线：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$c^2-a^2=b^2$，离心率 $e=\frac{c}{a}>1$，准线 $x=\pm\frac{a^2}{c}$，渐近线方程是 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$，椭圆上的点与两个定点 $F_1(c,0)$、$F_2(-c,0)$ 的距离之差等于常数（$2a$）。

抛物线：$y^2=2px$，焦点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线 $x=-\frac{p}{2}$，焦半径 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}$，过抛物线焦点的弦长 $|AB|=x_1+x_2+p$，抛物线上的点到焦点的距离等于它到准线的距离。

41. 双曲线的方程与渐近线方程的关系

(1) 若双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$。

(2) 若渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x\Leftrightarrow\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0\Rightarrow$ 双曲线可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$。

(3) 若双曲线与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有公共渐近线，可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$（$\lambda>0$，焦点 x 在轴上；$\lambda<0$，焦点 y 在轴上）

42. 若斜率为 k 的直线与圆锥曲线相交于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点，则弦长公式为

$$AB=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}\quad(k\neq0)$$

43. 柱体、锥体、球体的侧面积、表面积、体积计算公式

圆柱侧面积= $2\pi rl$ ，表面积= $2\pi rl + 2\pi r^2$ ，体积= Sh （ S是柱体的底面积， h是柱体的高）；

圆锥侧面积= πrl ，表面积= $\pi rl + \pi r^2$ ，体积= $\frac{1}{3}Sh$ （ S是锥体的底面积， h是锥体的高）；

球的半径是 R，则其体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ，其表面积 $S = 4\pi R^2$

（六）空间几何

44. 平面方程：

(1) 点法式： $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$， $\mathbf{n}=(A,B,C)$是平面的法向量

(2) 一般式： $Ax+By+Cz+D=0$ （ A,B,C不全为 0）

(3) 参数式：已知平面 Π 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$以及平行于平面的两不共线向量 $\mu_1=(X_1,Y_1,Z_1)$和 $\mu_2=(X_2,Y_2,Z_2)$，则有 $\begin{cases} x = X_1t_1 + X_2t_2 + x_0 \\ y = Y_1t_1 + Y_2t_2 + y_0 \\ z = Z_1t_1 + Z_2t_2 + z_0 \end{cases}$

45. 两平面间的关系：

(1) $\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$；（法向量共线但两平面不重合）

(2) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

(3) Π_1与 Π_2的夹角（ $\theta < \frac{\pi}{2}$）： $\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

46. 直线方程：

(1) 一般式（交面式）： $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

(2) 参数式： $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$

(3) 对称式（标准式）：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

47. 直线与平面的关系：

(1) $l//\Pi \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$;

(2) $l\perp\Pi \Leftrightarrow \frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$

(3) l与 Π 的夹角（$\theta<\frac{\pi}{2}$）：$\sin\theta=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

48. 曲面方程：

(1) 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$（$a,b,c>0$）

(2) 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$（$a,b,c>0$）

(3) 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$（$p,q>0$），当 $p=q$时，曲面为旋转抛物面

(4) 双曲抛物面：$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$（$p,q>0$）

（七）概率统计

49. 平均数、方差、标准差的计算

平均数：$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

方差：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+\cdots+(x_n-x)^2]$

标准差：$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+\cdots+(x_n-x)^2]}$

50. 回归线方程

$\hat{y}=a+bx$，其中 $b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$a=\bar{y}-b\bar{x}$

51. 独立性检验：$K^2=\frac{n(ac-bd)^2}{(a+b)(c+d)(c+a)(b+d)}$

52. 排列数、组合数

排列数公式：$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$，其中 $A_n^n=n!$，$A_n^0=1$；

组合数公式：$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$，其中 $C_n^n=C_n^0=1$

53. 二项式定理：

(1) $(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^na^0b^n$

(2) 第 $r+1$ 项：$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$（$0\le r\le n$，$r\in Z$）

(3) 系数和：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$，$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$

(4) 当 a 的绝对值与 1 相比很小且 n 不大时，有 $(1+a)^n\approx 1+na$，$(1-a)^n\approx 1-na$

54. 相对独立事件同时发生的概率 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

55. 正态分布记为 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中期望 $E\xi=\mu$，方差 $D\xi=\sigma^2$，曲线关于直线 $x=\mu$ 对称并在 $x=\mu$ 时取最大值。

56. 离散型随机变量的期望与方差的性质：

(1) 期望反映了离散型随机变量取值的平均水平；方差与标准差反映了离散型随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度。

(2) $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$；$E(C)=C$（$C$ 为常数）

(3) $D\xi=\left(x_1-E\xi\right)^2p_1+\left(x_2-E\xi\right)^2p_2+\cdots+\left(x_n-E\xi\right)^2p_n$；$D(C)=0$（$C$ 为常数）

(4) 设 $\eta=a\xi+b$，则 $E(\eta)=aE\xi+b$，$D(\eta)=a^2D\xi$，$D(\eta)=E\xi^2-\left(E\xi\right)^2$

(5) 若 $\xi\sim B(n,p)$，则 $E\xi=np$，$D\xi=np(1-p)$；若 ξ 服从几何分布，且 $P(\xi=k)=g(k,p)$，则 $E\xi=\frac{1}{p}$，$D\xi=\frac{1-p}{p^2}$。

（八）复数

57. 复数的除法运算：

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

58. 复数$z=a+bi$的模：$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

59. 复数之间不能进行大小比较

60. 设一元三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq0)$ 的三个根分别是x_1,x_2,x_3，则有：

(1) $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$， $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}$， $x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$

(2) 令 $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$，其中 $p=\frac{3ac-b^2}{3a^2}$， $q=\frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}$

当 $\Delta>0$ 时，方程有一个实根，一对共轭复根；

当 $\Delta=0$ 时，方程有三个实根，其中有一个二重根；

当 $\Delta<0$ 时，方程有三个不等实根。

（九）极限与级数

61. 柯西收敛准则：数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是：对于任意 $\varepsilon>0$，存在整数$N>0$，使得当 $n, m>N$ 时，有$|a_n-a_m|<\varepsilon$。

62. 极限的定义：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$：对于任意 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

63. 当 $x\to0$ 时，有 $e^x-1\sim x\sim\sin x\sim\ln(1+x)$， $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，则有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

64. 函数极限的计算：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^n$ ($n\in N_+$) 其中各函数极限均存在

(2) 洛必达法则：若函数和满足下列条件：

①$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=a$，其中 a=0 或 a=∞ ；

② 在点 a 的某去心邻域内两者均可导，且 $g'(x)\neq 0$；

则有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

65. 拉格朗日中值定理：如果函数$f(x)$满足在闭区间$[a,b]$上连续；在开区间(a,b)内可导；那么在开区间(a,b)内至少有一点 ε（ $a<\varepsilon<b$ ）使等式$f(b)-f(a)=f'(\varepsilon)(b-a)$成立。

66. 正项级数敛散性判断：

(1) 比较判别法：大收敛推出小收敛，小发散推出大发散

(2) 比值与根值判别法：

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}<1\text{，级数}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}\\>1\text{，级数}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散，且}\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty\\=1\text{，此判别法失效}\end{cases}$；

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}<1\text{，级数}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}\\>1\text{，级数}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{发散，且}\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty\\=1\text{，此判别法失效}\end{cases}$；

(3) 与 P级数比较：设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}>0$，当 $p>1$时收敛，当 $p\leq 1$时发散。

67. 交错级数的敛散性(莱布尼茨判别法)：设交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足$u_n\geq u_{n+1}$, $n\geq N>1$；$\lim\limits_{n\to\infty}u_n<u_1=0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛，且其和$0<\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n<u_1$，余项$|r_n|<u_{n+1}$。

68. 幂级数收敛半径及收敛域：

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ，则有

(1) 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$ ，则其收敛半径为 $R=\begin{cases}\frac{1}{l}, & 0<l<+\infty \\ 0, & l=+\infty \\ +\infty, & l=0\end{cases}$ ；

(2) 判断 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 $x-x_0=\pm R$ 处的敛散性；

(3) 若该级数在 $x-x_0=R$ 处收敛，则其收敛域为 $(-R+x_0, R+x_0]$；若该级数在 $x-x_0=-R$ 处收敛，则其收敛域为 $[-R+x_0, R+x_0)$；若该级数在 $x-x_0=\pm R$ 处都收敛，则其收敛域为 $[-R+x_0, R+x_0]$。

（十）矩阵、线性空间与线性变换

69. 矩阵的转置：

(1) 对于 n 阶实矩阵 A，若满足 $AA^T=E$ 或 $A^TA=E$（为单位矩阵），则矩阵 A 称为正交矩阵，其中 A^T 为 A 的转置；

(2) 若 n 阶方阵 A 满足 $A^T=A$，则称 A 为对称矩阵；若 n 阶方阵 A 满足 $A^T=-A$，则称 A 为反对称矩阵，反对称矩阵对角线上的元素必为 0；

(3) 转置的运算规律：$(AB)^T=B^TA^T$

70. 齐次线性方程组的解空间的维数=方程组系数矩阵的列数-系数矩阵的秩

71. 特征值和特征向量：

(1) 给定矩阵 M，若存在一个非零向量 $\vec{\alpha}$ 和实数 λ ，满足 $M\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$ ，则称 λ 为矩阵 M 的特征值，$\vec{\alpha}$ 为矩阵 M 的属于特征值 λ 的特征向量。

(2) 任意矩阵所有特征值的和等于该矩阵对角线元素之和；所有特征值的乘积等于该矩阵的行列式的值。

(3) 若同阶矩阵 A和 B的特征值相同，则有 A等价于 B。

72. 非异矩阵：若n阶矩阵A的行列式不为零，即$|A| \neq 0$，则称A为非奇异矩阵或满秩矩阵，否则称A为奇异矩阵或降秩矩阵。

73. 相似、合同：

(1) 相似：$\exists$非异矩阵 P，使得 $PAP^{-1} = B$，则有 A相似于 B。

(2) 相似的判断：相同的特征值、迹（自左上到右下的主对角线的和）、行列式的值相同

(3) 合同：$\exists$非异矩阵 P，使得 $PAP^{T} = B$，则有 A与 B合同。

(4) 合同的判断：正、负特征值的个数相等

74. 线性空间：

(1) 柯西·布涅科夫斯基不等式：设 $\mathbf{V}$是欧式空间，$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{R}$，则 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \le (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$线性相关时，等号才成立

(2) $\mathbf{V}$本身与 $\{0\}$都是 $\mathbf{V}$的子空间，称之为 $\mathbf{V}$的平凡子空间，而 $\mathbf{V}$的其他子空间称为非平凡子空间。

(3) 设 W_1 与 W_2 是线性空间 $\mathbf{V}$ 的两个子空间，则 $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$

75. 施密特正交化法：

对 n维欧式空间 $\mathbf{V}$的任一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，

令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$，

$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$，

$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$，

$\cdots$，

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1},$$

$$\eta_i = \frac{1}{|\beta_i|}\beta_i, \qquad i=1，2，\cdots，n,$$

η_i即为 V的一组标准正交基。