2019 下半年教师资格《初中数学》真题及答案

一、单项选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分，共 40 分)

1. 在利用导数定义证明的过程中用到的极限是（）

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$

D. $\lim\limits_{x\to\infty}q^x=0,0<q<1$

【答案】B

2. 设 M, X, Y 为 n 阶方阵，则下列命题一定正确的是（）

A. XY=YX

B. M(X+Y)=MX+MY

C. 若 XY=0 且 $X\neq 0$，则 Y=0

D. 若 MX=MY 且 $M\neq 0$，则 X=Y

【答案】D

3. 下列定积分计算结果正确的是（）

A. $\int_{-1}^{1}\left(x^2+x^3\right)dx=0$

B. $\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=0$

C. $\int_{-1}^{1}\ln(x+2)dx=0$

D. $\int_{-1}^{1}\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx=0$

【答案】D

4. 将椭圆$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a>b>0\\ z=0\end{cases}$绕长轴旋转一周，所得旋转曲面的方程为（）

A. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$

B. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$

C. $x^2+y^2+z^2=a^2$

D. $x^2+y^2+z^2=b^2$

【答案】A

5. 设a_1，a_2和β_1，β_2是方程组$AX=0$的两个不同的基础解系，则下列结论正确的（）

A. 向量组a_1，a_2，β_1的秩小于向量组β_1，β_2的秩

B. 向量组a_1，a_2，β_1的秩大于向量组β_1，β_2的秩

C. 向量组a_1，a_2，β_1的秩等于向量组β_1，β_2的秩

D. 向量组a_1，a_2，β_1的秩与向量组β_1，β_2的秩无关

【答案】C

6. 三个非零向量共面，则下列结论不一定成立的是（）

A. $(a\times b)\cdot c=0$

B. $a+b+c=0$

C. a, b, c 线性相关

D. $(a\times c)\cdot b=0$

【答案】B

7.在平面直角坐标系中，将一个多边形依次沿两个坐标轴方向分别平移 2 个单位和 3 个单位后，得到的图形与原来的图形的关系不一定正确的是()

A.全等

B.平移

C.相似

D.对称

【答案】D

8. 学生是数学学习的主体是数学教学的重要理念，下列关于教师角色的概述不正确的是()

A.组织者

B.引导者

C.合作者

D.指挥者

【答案】D

二、简答题(本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分)

9. 设 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，变换 $Y=AX+B$，其中变换矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

（1）写出椭圆 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{\frac{2}{x^2}}{9}=1$ 在该变换下 $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 满足的曲线方程（5 分）

（2）举例说明在该变换下什么性质保持不变，什么性质发生变化（例如距离、斜率等）（2 分）

【答案】

（1）已知 $Y=AX+B$，$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+$

$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1}{2}+3\\\frac{x_2}{3}+5\end{pmatrix}$，解得 $\begin{cases}y_1=\frac{x_1}{2}+3\\y_2=\frac{x_2}{3}+5\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=2(y_1-3)\\x_2=3(y_2-5)\end{cases}$，将 x_1、x_2 代入椭圆方程得

$\frac{4(y_1-3)^2}{4}+\frac{9(y_2-5)^2}{9}=1$，化简得 $(y_1-3)^2+(y_2-5)^2=1$。

(2)以第一问中的椭圆方程为例，在该变化下得到的新方程是圆的标准方程，其中图形的大小、形状、几何中心的位置都发生了变化。

10. 利用一元函数积分计算下列问题：

（1）求曲线 $y=\sin x$ 与 $y=x^2-x$ 所围平面图形面积（4 分）

（2）求曲线段 $y=\sin x$，$x\in[0,\pi]$ 绕 x 轴旋转一周所围成的几何体体积（3 分）

10. 【答案】（1）$2+\frac{\pi^3}{6}$；（2）$\frac{\pi^2}{2}$。

（1）由题可得曲线 $y=\sin x$ 与 $y=x^2-\pi x$ 的两个交点分别为 $(0,0),(\pi,0)$，所以取 x 为积分变量，从 0 到 π 上曲线 $y=\sin x$ 与 $y=x^2-\pi x$ 所围平面图形面积为

$$\int_0^{\pi}\left[\sin x-\left(x^2-\pi x\right)\right]dx=\int_0^{\pi}\left(\sin x-x^2+\pi x\right)dx=\int_0^{\pi}\sin x dx-\int_0^{\pi}x^2dx+\int_0^{\pi}\pi x dx=$$

$$\left(-\cos x-\frac{1}{3}x^3+\frac{\pi}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{\pi}=2-\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^3}{2}=2+\frac{\pi^3}{6};$$

（2）由旋转体公式可得，$y=\sin x$ 绕 x 轴旋转一圈所围成的几何体体积为

$$\int_0^{\pi}\pi(\sin x)^2dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\pi\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}。$$

11. 一个袋子里有 8 个黑球，8 个白球，随机不放回地连续取球五次。每次取出 1 个球，求最多取到 3 个白球的概率。

11.【答案】$\frac{67}{78}$。

[解析]由题可知随机不放回地连续取球 5 次，设“最多取到 3 个白球”事件为 A，那么它的对立面“取到 4 个白球或者 5 个白球”，故得

$$P(\overline{A})=\frac{8}{16}\times\frac{7}{15}\times\frac{6}{14}\times\frac{5}{13}\times\frac{4}{12}+\frac{8}{16}\times\frac{8}{15}\times\frac{7}{14}\times\frac{6}{13}\times\frac{5}{12}+\frac{8}{16}\times\frac{8}{15}\times\frac{7}{14}\times\frac{6}{13}\times\frac{5}{12}+$$
$$\frac{8}{16}\times\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{6}{13}\times\frac{5}{12}+\frac{8}{16}\times\frac{7}{15}\times\frac{6}{14}\times\frac{8}{13}\times\frac{5}{12}+\frac{8}{16}\times\frac{7}{15}\times\frac{6}{14}\times\frac{5}{13}\times\frac{8}{12}=\frac{11}{78},$$

所以“最多取到 3 个白球”事件的概率为 $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{67}{78}$。

12. 简述研究中学几何问题的三种主要方法。

12. [答案要点]

研究中学几何问题的方法主要数形结合、化归思想、变换思想。

中学几何数学是-门比较抽象的学科，包括的空间和数量的关系，数形结合能够帮助学生将两者相互转化，使抽象的知识更便于理解学习。在中学几何学习中， 数形结合的思想具有重要的作用，教师在教学中运用数形结合思想，能够将几何图形用代数的形式表示，并利用代数方式解决几何问题。例如，根据几何性质，建立只限于平面的代数方程，或是根据代数方程，确定点、线、面三者之间关系。数形结合将几何图形与代数公式密切的联系在一起，利用代数语言将几何问题简化，使学生更容易解决问题，是几何教学中的核心思想方法。

化归思想是数学中普遍运用的一 种思想，在中学几何教学中， 教师常运用这一 思想，基本的运用方法就是将几何问题转化为代数问题，利用代数知识将问题解决后，再返回到几何中。或是在对空间曲面进行研究时，将复杂的空间几何图形转化为学生熟悉的平面曲线， 便于学生理解和解决。例如，在解诀圆柱问题时， 可以通过其对应的轴截面进行解决，在解诀正棱锥问题时，可以利用化归思想将这一 问题转化为对应特征三角形和特征梯形的问题进行解决。

变换思想是能够将复杂问题简单化的一种思想方法，变换思想在运用时，一般仅改变数量关系形式和相关元素位置，为题的结构和性质没有变化。在几何教学中，教师利用变换思想进行变换，实现二次曲线方程的化简，能够通过方程运算准确的将方程所表示的图形展现出来，在降低学生学习难度的同时，也为用计算机研究几何图形性质等提供了依据。

13.简述数学教学活动中调动学生学习积极性的原则。

13. [答案要点]数学教学活动，特别是课堂教学应激发学生兴趣，调动学生积极性，引发学生的数学思考，鼓励学生的创造性思维; 要注重培养学生良好的数学学习习惯，使学生掌握恰当的数学学习方法。

教师教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础，面向全体学生，注重启发式和因材施教。教师要发挥主导作用，处理好讲授与学生自主学习的关系，引导学生独立思考、主动探索、合作交流，使学生理解和掌握基本的数学知识与技能，体会

和运用数学思想与方法，获得基本的数学活动经验。

三、解答题(本大题共 1 小题，10 分)

14.

对于问题：“已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0$，对于任何 $x\in[0,1]$，有 $\left|f(x)'\right|\le\left|f(x)\right|$，求证 $f(x)=0, x\in[0,1]$。”有人是这样做的：

$$\left|f(x)-f(0)\right|=\left|f'(\xi_1)\right|(x-0)(0<\xi_1<x) \qquad ①$$

$$\left|f'(\xi_1)\right|x\le f(\xi_1)x \qquad ②$$

$$\left|f(\xi_1)-f(0)\right|x\le\left|f(\xi_2)\right|\xi_1x\le\left|f(\xi_2)\right|x^2\,(0<\xi_2<\xi_1<x) \qquad ③$$

$$\left|f(\xi_2)-f(0)\right|x^2\le\left|f'(\xi_2)\right|\xi_2x^2\le\left|f'(\xi_3)\right|\xi_3x^2\le\left|f'(\xi_3)\right|x^3\ \ (0<\xi_3<\xi_2<\xi_1<x) \qquad ④$$

请你解答下列问题:

(1)写出步骤①的证明依据(1 分)

(2)写出步骤②的证明依据(1 分)

(3)指出步骤③与步骤①的关系(1 分)

(4)完成步骤④以后的证明(7 分)

14.【答案要点】

（1）根据拉格朗日中值定理有：$f(x)$ 在 $[0,x]$ 上可导，$\exists\zeta_1\in(0,x)$，使 $f^{'}(\zeta_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$，

即 $\left|f(x)-f(0)\right|=\left|f^{'}(\zeta_1)\right|\left|x-0\right|\Rightarrow\left|f(x)-f(0)\right|=\left|f^{'}(\zeta_1)\right|(x-0)$，所以有：$\left|f^{'}(\zeta_1)\right|x\le f(\zeta_1)x$；

（2）根据已知条件：对于 $\forall x\in[0,1]$，有 $\left|f^{'}(x)\right|\le\left|f(x)\right|$

（3）$\because\left|f^{'}(\zeta_1)-f(0)\right|\cdot x=\left|f^{'}(\zeta_2)\right|(\zeta_1-0)\cdot x$，$\exists\zeta_2\in(0,\zeta_1)$，

$\therefore\left|f^{'}(\zeta_1)-f(0)\right|\cdot x\le\left|f(\zeta_2)\right|\zeta_1\cdot x$，$\therefore\left|f^{'}(\zeta_1)-f(0)\right|\cdot x\le\left|f(\zeta_2)\right|\cdot x$，步骤①在 $(0,x)$ 上，

利用拉格朗日中值定理，步骤 3 在 $(0,\zeta_1)$ 上，继续利用拉格朗日中值定理；

（4）因为 $\left|f(x)-f(0)\right|=\left|f^{'}(\zeta_1)\right|(x-0)\qquad(0<\zeta_1<x)$ ①②，

$\left|f(\zeta_1)-f(0)\right|\cdot x\le\left|f(\zeta_2)\right|\cdot x^2\qquad(<0<\zeta_2<\zeta_1<x)$ ③，

$\left|f(\zeta_2)-f(0)\right|\cdot x^2\le\left|f(\zeta_3)\right|\cdot x^3\qquad(<0<\zeta_3<\zeta_2<\zeta_1<x)$ ④，…，$f(0)=0$，

$\left|f(x)-f(0)\right|\le\left|f(\zeta_1)\right|\cdot x\le\left|f(\zeta_2)\right|\cdot x^2\le\cdots\le\left|f(\zeta_n)\right|\cdot x^n\qquad(<0<\zeta_n<\zeta_{n-1}<\cdots<\zeta_1<x)$

，当 $n\to\infty,\zeta_n\to0$，则有：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|f(x)-f(0)\right|\le\lim\limits_{n\to\infty}f(\zeta_n)\cdot x^n=0$，则 $\left|f(x)-f(0)\right|=0$，

$\therefore\left|f(x)\right|=0$，即 $f(x)=0$。

四、论述题(本大题 1 小题，15 分)

15.学生的数学学习应当是一一个生动活泼，积极主动和富有个性的过程，认真听讲，积极思考，动手实践，自主探

索，合作交流等都是学习数学的主要方式，请谈谈教师如何在教学中帮助学生养成良好的数学学习习惯。
[答案要点]
学生的数学学习应当是一个生动活泼的、主动的富有个性的过程。认真听讲、 积极思考、 动手实践、自主探索、合作交流等， 都是学生学习数学的重要方式。学生的数学学习应当有足够的时间和空间经历观察、实验、 猜测、计算、推理、验证等活动过
在数学教学中，必须通过学生主动的活动包括观察、描述、画图、操作、猜想、实验、收集整理数据、思考、推理、交流和应用等等，让学生亲身体验如何做数学”、实现数学的“再创造”，并从中感受到数学的力量， 教师在学生进行数学学习的过程中应当给他们留有充分的思维空间，使学生能够真正的从事数学的思维活动。应该从以下几方面入手: 1、 使学生认识到学习的重要性; 2.培养学生认真听课的习惯:首先要提前预习，明确听课的目的;其次在课堂教学中提高学生的学习兴趣;最后在教学过程中及时对学生的表现进行评价，有助学生认真听课习惯的养成; 3、培养学生认真思考的习惯; 4、 培养学生想象的习惯; 5、培养学生认真复习的习惯; 6、培养学生认真完成作业的习惯。
五、案例分析题(本大题 1 小题，20 分)阅读案例，并回答问题.
16.
案例：下面是某个学生的作业：

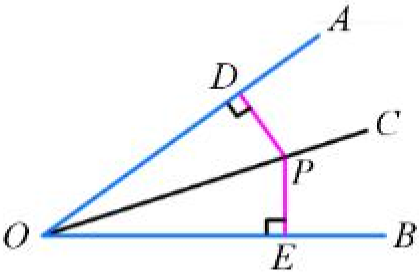
解方程：$\frac{1-x}{x-2}=\frac{1}{2-x}+3$

①移项得：$\frac{1-x}{x-2}-\frac{1}{2-x}=3$ ② 通分得：$\frac{1-x+1}{x-2}=3$ ③化简得：$-1=3$ ④矛盾

原方程是不是无解啊。
问题:
(1)指出该学生解此方程时出现了错误，并分析其原因(7 分)
(2)给出上述方程的一般解法，帮助学生解除疑惑(7 分)
(3)简述中学阶段解方程常用的数学思想方法(6 分)
16. [答案要点]
(1)学生解方程时并没有按照分式方程的标准解法，而是直接移项再去化简分式的分子和分母;解分式方程是八年级学生重点学习的一个内容，同样也是一个难点， 学生出现这种问题可能在于运算基础不够扎实，想要直接约去分式的分子与分母,一定要保证约去的式子不能为 0。
(2)原式两边乘得，化简可得，解得，最后将带入原方程验增根，发现，所以该方程无解。
(3)在中学阶段常用的解方程的数学思想方法有很多，常用的有整体的思想，比如换元法， 换元法是在解方程中常用的一种方法，即对结构较复杂的方程组，若把其中的某些部分看成一个整体，用新的字母代替，从而得到新的方程解题方法，换元法
能使复杂的问题简单化;其次还有方程思想，在解决某些问题时，从题目中的已知量和未知量之间的数量关系入手，找出相等的关系，运用数学语言将相等关系转化成新的方程或方程组，再通过新的方程与方程组使问题解决。对于解方程还常常使用到化归的思想，划归思想是把所要解决的问题转化归结为另一个较易解决的问题或已经解决的问题，即化难为易、化繁为简，化未知为已知。

六、教学设计题(本大题 1 小题，30 分)
17.针对“角平分线的性质定理”的内容，请你完成下列任务:
(1)叙述角平分线的性质定理; (5 分)
(2)设计“角平分线的性质定理“教学过程(只要求写出新课导入、定理形成与证明过程)，并说明设计意图; (20 分)
(3)借助“角平分线的性质定理”,简述如何帮助学生积累认识几何图形的数学活动经验.(5 分).
17. [答案要点]
(1)角平分线上的点到角两边的距离相等。
(2)新课导入:
教师:我们应该在很早之前就接触过角的平分线这个概念，谁能告诉我什么是角的平分线呢?

(学生回答)一条射线把一个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的平分线。
教师:大家观察一下这个角，其实，再添加一些线段就能成为两个三角形，我们之前学习了全等三角形的性质及判定，那么结合这个，我们是否能够发现角的平分线的一些性质呢?今天我们就来探究一 下这个问题。
设计意图:复习角平分线的定义，并为角平分线的性质定理的引出做铺垫，为下一步设置问题通过折纸及作图过程，由学生自己去发现结论。
教学活动:任意作-一个角 LAOB, 作出 LAOB 的平分线 OC,在 OC 上任取一点 P,过点 P 画出 OA 和 OB 的垂线， 分别记垂足为 D, E，PD 和 PE 有什么关系?引导学生猜想。
教师:大家可以用直尺来量测一下，能够得到结论吗?
大部分同学都得到了 PD=PE 的结论。 那么有谁能够利用数学方法来证明一下呢?
已知:如图，∠AOC=∠BOC， 点 P 在 0C 上，PD⊥OA，PE⊥OB，垂足分别为 D，E。
求证: PD=PE。



师生共同证明:
∵PD⊥OA，PE⊥OB
∴∠PDO=∠PEO=90°
在ΔPDO 和ΔPEO 中
∠PDO=∠PEO (已证)
∠AOC=∠BOC
OP=OP (公共边)
∴ΔPDO≌ΔPEO (AAS)
∴PD=PE (全等三角形的对应边相等)
得到角平分线性质:角的平分线上的点到角的两边的距离相等。
教师:通过刚刚的证明，我们得到了我们的结论是正确的。是不是在角平分线上任意取点，都可以得到这个结论呢?
(学生动手验证)
教师:我们发现，任意一点都可以得到相等的结论。由此，我们得到了角平分线的性质:
角平分线上的点到角的两边的距离相等。
结论数学语言:
∵OP 平分∠AOB，PD⊥OA，PE⊥OB
∴PD=PE。
教师:在这个定理中，我们必须明白，这个性质的应用必须满足几个条件:
(1)角的平分线;
(2)点在该平分线上;
(3)垂直距离。
设计意图:让学生通过实验发现、分析概括、推理证明角的平分线的性质，体会研究几何问题的基本思路，以角的平分线的性质的证明为例，让学生概括几何名命题的-般步骤，发展学生的归纳概括能力。
(3)数学活动经验是一种 属于学生自己的“主观性认识”，对于认识几何图形的数学活动经验，是学生经过数学学习后对整个数学活动过程产生的认识。如何帮助学生积累认识几何图形的数学活动经验，首先要联系直观图形，把生活经验转化为基本数学活动经验。学生在生活中已经积累的一些关于数学的原始、初步的经验，因此要善于捕捉生活中的数学现象，挖掘数学知识的生活内涵，让学生亲身经历将生活经验转化为数学活动经验的过程。例如在本节课中，可以先让学生画一个角，然后探究角平分线的作法。利用模型教具说明平分角的仪器的工作原理，从中受到启发，利用尺规做角的平分线，进-步思考角的平分线上的点的特征。

其次要引导观察、思考推理，丰富学生思维的经验。 积累活动经验总得依赖一些活动，但是所谓的活动并不-定是指直观的操作活动，行为操作的经验是基本活动经验，抽象的思考、探究的经验也是基本活动经验的重要组成部分。例如在本节课中，教师在抛出“PD 和 PE 有什么关系?之后，教师先引导学生进行猜想，再带领学生进行自主探究去证明，对于不同的学生想出证明方法可能都不一样，所以教师可以组织学生进行汇报交流，最后师生共同总结得到证明方法:最終得到角平分线定理的性质。